

Logo di Stefano Visciglia

# Festa della Matematica

CON IL PATROCINIO DELLA REGIONE PIEMONTE  
E  
DEL COMUNE DI TORINO

GARA PER IL PUBBLICO

8 Gallery – Venerdì 11 marzo 2011

## OLIMPIADI DI MATEMATICA

### Problema 1 – Cronoscalata

20 punti

Un ciclista scala una montagna alla velocità media di  $20 \text{ km/h}$ , e poi, giunto in cima, gira la bicicletta e ridiscende a valle seguendo esattamente la stessa strada ad una media di  $60 \text{ km/h}$  (si consideri trascurabile il tempo per girare la bicicletta). Qual è la velocità media complessiva (in  $\text{km/h}$ ) tenuta dal ciclista durante tutto il suo viaggio?

**Soluzione:**

Se il tempo impiegato dal ciclista nella discesa è  $t$ , quello impiegato nella salita sarà  $3t$ . La velocità media sarà quindi  $v = \frac{\text{percorso totale}}{\text{tempo totale}} = \frac{20 \times 3t + 60 \times t}{3t + t} = \frac{120t}{4t} = 30 \text{ (km/h)}$ .

Risposta: **0030**

### Problema 2 – Puntuale al lavoro

20 punti

Il signor Pacifico parte da casa sua per andare al lavoro ogni mattina alle 8 precise. Se viaggia a  $40 \text{ km/h}$ , arriva al suo posto di lavoro con 3 minuti di ritardo. Se viaggia invece a  $60 \text{ km/h}$ , arriva 3 minuti in anticipo. Quale velocità media (in  $\text{km/h}$ ) dovrebbe tenere il signor Pacifico per arrivare puntuale al lavoro?

**Soluzione:**

Indichiamo con  $x$  il tempo in ore che il signor Pacifico deve impiegare per arrivare al lavoro.

Poiché 3 minuti equivalgono a 0,05 ore abbiamo  $40(x + 0,05) = 60(x - 0,05)$  sarà quindi  $40x + 2 = 60x - 3$  e  $x = 0,25$ .

La distanza dalla casa all'ufficio è  $40(0,25 + 0,05) = 12$  km. Di conseguenza la sua velocità dovrà essere  $12/0,25 = 48$  km/h.

**Risposta:** 0048

### **Problema 3 – La corsa in edicola**

**20 punti**

Gianni esce di casa per comperare la sua rivista preferita e correndo riesce a fare in media 120 passi al minuto. Al ritorno invece, mentre sfoglia la rivista, cammina in media a 60 passi al minuto. Se in tutto ha camminato per 15 minuti, calcola la distanza in passi della casa di Gianni dall'edicola.

**Soluzione:**

All'andata Gianni impiega la metà del tempo che al ritorno. Quindi impiega 5 minuti per andare e 10 minuti per tornare. Abbiamo per la distanza in passi tra casa ed edicola  $60 \times 10 = 120 \times 5 = 600$ .

**Risposta:** 0600

### **Problema 4 – Una cintura attorno alla terra**

**25 punti**

Immagina la Terra come una sfera perfetta e omogenea, di raggio 6378 km, ed immagina una fascia di metallo stretta attorno all'equatore. Ora supponi di allungare di un metro la fascia in modo che si sollevi dalla superficie uniformemente attorno alla sfera. In questo caso ideale, di una Terra liscia e senza ostacoli, di quanti metri si alza la fascia metallica rispetto al suolo? [indicare solo le prime 4 cifre decimali senza approssimare e valutare  $\pi = 3,1416$ ]

**Soluzione:**

Se aggiungiamo 1m alla circonferenza terrestre avremo la seguente equazione:  $2\pi(r + x) - 2\pi r = 1$ , dove  $r$  è il raggio della Terra espresso in metri ed  $x$  è l'altezza rispetto al suolo. Quindi  $x$  sarà  $1/6,2832 \text{ m} = 0,1591\text{m}$

**Risposta:** 1591

### **Problema 5 – Il ciclista in fuga**

**25 punti**

Due ciclisti percorrono una pista circolare lunga 900 m, partendo contemporaneamente da due punti diametralmente opposti e girando nello stesso senso. La loro velocità costante è rispettivamente di 39 km/h e di 42 km/h. Dopo quanti giri il ciclista più veloce raggiunge l'altro corridore?

**Soluzione:**

La differenza tra le velocità dei due ciclisti è di 3 km/h e sappiamo che sono partiti con una distanza fra loro di 450 m. Per percorrere 450 m a 3 km/h si impiegano 9 minuti; in questo tempo si percorrono 6300 m a 42 km/h, cioè 7 giri.

**Risposta:** 0007

## **Problema 6 – Guarda che Luna**

**25 punti**

Una ragazza guarda la Luna piena attraverso un foro circolare praticato in un cartoncino e trova che quando il cartoncino è messo a 90 cm dal suo occhio il foro copre esattamente il disco lunare. Stima il diametro della luna (in km) se il foro ha un diametro di 8 mm e la Luna dista dalla Terra  $3,8 \times 10^5$  km.

**Soluzione:**

Si può arrivare al risultato (approssimato) impostando una semplice proporzione (anche qui trascurando alcuni dettagli):

$$\frac{0,8 \text{ cm}}{90 \text{ cm}} = \frac{x}{3,8 \times 10^5 \text{ km}} \quad \text{dove } x \text{ è la lunghezza del diametro lunare in km.}$$

Si ottiene  $x = 3377,7 \text{ km}$ .

**Risposta:** 3377

## **Problema 7 – Traffico in autostrada**

**35 punti**

Percorrendo un tratto autostradale alla velocità costante di 120 km/h, un automobilista sorpassa, in 30 minuti, 50 camion che a loro volta marciano a una velocità di 80 km/h. Ora, supponendo costanti tutte le velocità in gioco e soprattutto mantenendo costanti i flussi di traffico, quanti camion percorrono quell'autostrada in un'ora? In altre parole: un'ipotetica persona, ferma al lato della strada, quanti camion vedrebbe passare davanti a sé in un'ora?

**Soluzione:**

La differenza tra le velocità dei camion e della macchina è di 40 km/h: superare 50 camion in 30 minuti significa che i camion sono dislocati su 20 km. Dal momento che i camion viaggiano a 80 km/h, in un'ora transiteranno 200 camion.

**Risposta:** 0200

### Problema 8 – Una tavoletta di pongo

35 punti

Una tavoletta di pongo di forma rettangolare viene deformata in modo da aumentarne la larghezza e contemporaneamente diminuirne l'altezza di una stessa percentuale intera  $x$ . Al termine della deformazione l'area della tavoletta risulta diminuita di una percentuale compresa fra il 3% e il 5%. Quanti sono i valori possibili per  $x$ ?

Nota: si approssimi  $\sqrt{3}$  con 1,732 e  $\sqrt{5}$  con 2,236.

**Soluzione:**

Supponiamo che la tavoletta abbia originariamente base  $B$  e altezza  $H$ . L'area iniziale misurerà  $BH$ . Dopo la deformazione le sue dimensioni saranno rispettivamente  $B(1+x)$  e  $H(1-x)$  quindi l'area finale misurerà  $BH(1-x^2)$ . Pertanto:

$$0,95 < 1 - x^2 < 0,97$$

Quindi:

$$0,1732 < x < 0,2236$$

Poiché la percentuale deve essere intera, si hanno 5 valori possibili: 18%, 19%, 20%, 21%, 22%.

Risposta: **0005**

### Problema 9 – Il parcheggio

35 punti

Nel nuovo quartiere di *Matelandia* verrà realizzato un grande centro commerciale. Bisogna progettare un grande parcheggio antistante al centro. Il parcheggio avrà forma rettangolare e sarà delimitato da tre lati da una rete lunga 280 metri, mentre il quarto lato sarà costituito dall'edificio commerciale. Quale è l'area massima possibile del parcheggio, espressa in metri quadrati?

**Soluzione:**

Siano  $x$  ed  $y$  i lati del rettangolo espressi in metri: dobbiamo massimizzare il prodotto  $xy$  con il vincolo  $2x + y = 280$ . Eliminando  $y$ , l'area  $xy$  sarà pari a  $x(280 - 2x) = 2x(140 - x)$ . Il grafico di questa funzione è una parabola avente concavità rivolta verso il basso, quindi il massimo si avrà in corrispondenza del vertice che ha l'ascissa  $x = 70$ . L'area del parcheggio in  $m^2$  sarà pertanto  $2 \times 70 \times (140 - 70) = 2 \times 70^2 = 9800$ .

Risposta: **9800**

### Problema 10 – Il vecchio disco

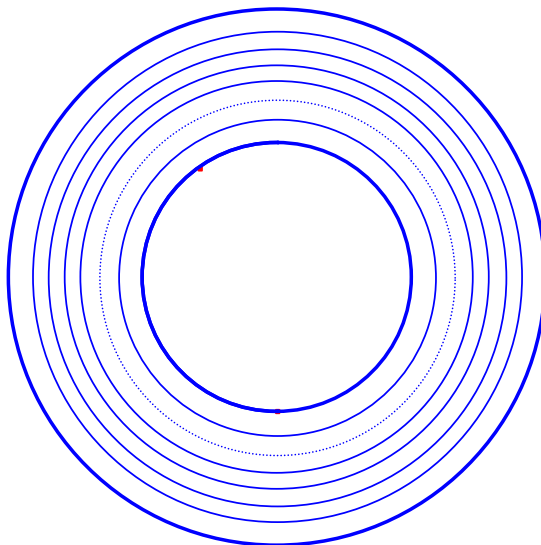
40 punti

Un vecchio disco di musica leggera, a 45 giri (al minuto...!), è inciso nella zona compresa tra i diametri di 18 cm e 9 cm. e la sua audizione richiede esattamente 4 minuti. Qual è la lunghezza (in cm) del percorso che la puntina compie dall'inizio alla fine del disco?

Si immagini che il percorso della puntina sia un insieme di circonferenze concentriche (anziché una spirale archimedeica), senza linee di collegamento fra loro, e si valuti  $\pi = 3,1416$ .

**Soluzione:**

Consideriamo il valore medio del diametro: 13,5 cm. In 4 minuti la puntina percorre 180 giri. La lunghezza del percorso sarà dunque:  $(13,5 \times 180 \times \pi)$  cm = 7634,088 cm. (Vedi figura)  
N.B. Con il modello della spirale di Archimede il risultato sarebbe stato 7634,089379 cm circa.



Risposta: **7634**

**Problema 11 – Sfida su Internet**

**50 punti**

Sulla Rete è indetta una sfida: i partecipanti si batteranno a coppie ad eliminazione diretta. Verranno sorteggiate le coppie e, se il numero dei partecipanti è dispari, quello che rimane senza avversario passerà automaticamente il turno senza combattere. Il turno successivo avrà la stessa regola del precedente, finché resterà l'ultima coppia a disputarsi la finalissima.

Si iscrivono al torneo 2011 persone. Si chiede: quante partite verranno giocate in totale?

**Soluzione 1:**

Sia  $n$  il numero dei partecipanti. Se  $n = 1$  si giocano 0 partite, se  $n = 2$  si gioca una sola partita (la finale). Per induzione si può dimostrare che il risultato sarà  $n-1$ . Quindi, nella fattispecie, 2010.

**Soluzione 1:**

Ad ogni partita viene eliminato uno ed un solo concorrente. Poiché uno solo (il vincitore) rimane imbattuto, il numero delle partite giocate sarà uguale al numero dei partecipanti meno uno.

Risposta: **2010**

## Problema 12 – Un grande biliardo

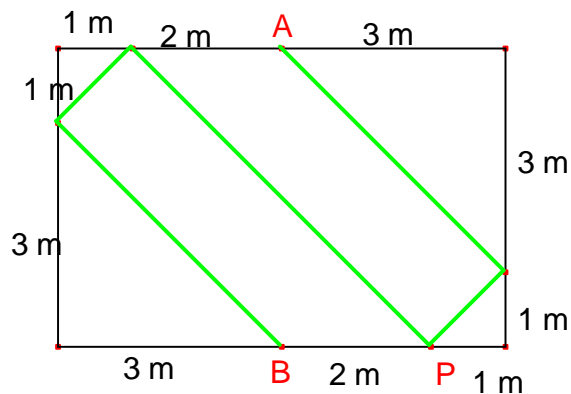
50 punti

Una palla da biliardo, inizialmente posta esattamente a metà del lato più lungo - accostata al bordo - di un enorme tavolo rettangolare di 6 metri per 4 metri, viene colpita con una direzione che forma un angolo di  $45^\circ$  rispetto allo stesso lato del tavolo. Supponendo che il colpo sia stato sufficientemente energetico, a quale distanza dal punto di partenza del tiro si troverà la palla nell'istante in cui tocca la sua 72<sup>a</sup> sponda?

Dare la risposta in millimetri.

### Soluzione:

Applicando la legge della riflessione ci si accorge che, indicato con A il punto di partenza del tiro, la palla avrà in B la sua 5<sup>a</sup> sponda e, per simmetria, tornerà in A dopo 10 sponde. Pertanto iterando questo ragionamento la palla toccherà la sua 72<sup>a</sup> sponda nel punto P, la cui distanza da A è calcolabile mediante il teorema di Pitagora.



$$\overline{PA} = \sqrt{4^2 + 2^2} \text{ m} = \sqrt{20} \text{ m} \cong 4,472135955 \text{ m} = 4472,135955 \text{ mm}.$$

Risposta: **4472**

## Problema 13 – La costruzione della scuola

50 punti

Per promuovere lo studio della matematica, nonostante i tempi di crisi, il ministro dell'istruzione ha deciso di finanziare un progetto per costruire una nuova scuola di specializzazione per matematici. Il progetto, che dovrà terminare nel 2012, prevede varie attività, ciascuna delle quali ha una durata ed una serie di attività come prerequisiti che devono essere state completate prima di poter iniziare. Il tutto è riassunto dalla seguente tabella:

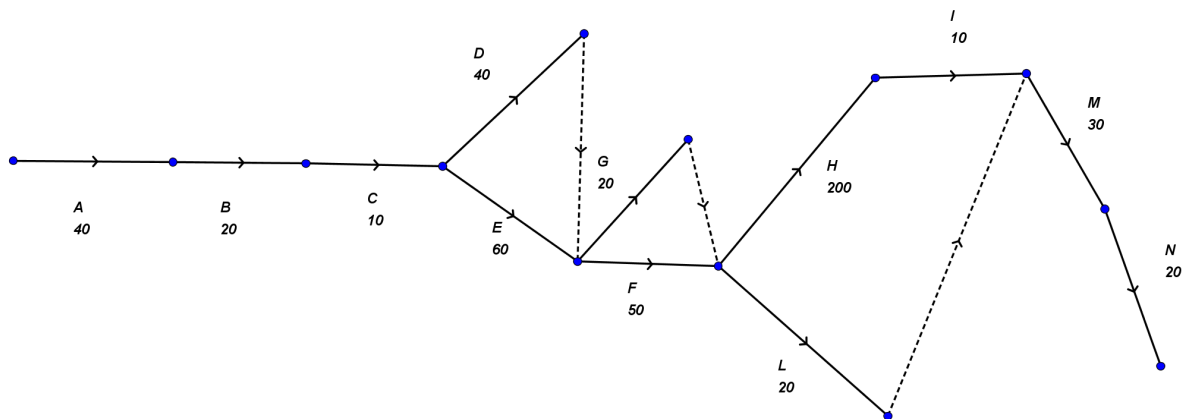
attività	descrizione	durata giorni	prerequisiti
A	analisi fabbisogni	40	--
B	dimensionamento servizi	20	A
C	approvazione	10	B
D	progettazione	40	C

E	ricerca ubicazione	60	C
F	progetto esecutivo	50	D,E
G	acquisto terreno	20	E
H	costruzione	200	F,G
I	collaudo	10	H
L	acquisto attrezzature e mobili	20	F
M	installazione attrezzature e mobili	30	I,L
N	preparazione all'inaugurazione	20	M

Se il progetto inizia oggi 11/03/2011, quale sarà la data minima entro quale sarà terminata l'ultima attività? (per semplicità si supponga di lavorare tutti i giorni dell'anno, compresi i festivi, e si tenga conto del fatto che il 2012 è bisestile). Nella risposta fornire come prime 2 cifre il giorno e come terza e quarta cifra il mese (ad esempio per 5/9/2012 la risposta è 0509).

**Soluzione:**

Costruiamo un grafo in cui ogni segmento rappresenta una attività e le frecce indicano i prerequisiti (un segmento tratteggiato indica un prerequisito senza attività).



Dal grafo è chiaro che il numero di giorni minimo necessario per completare il progetto si ottiene sommando le durate delle attività A,B,C,E,F,H,I,M,N, quindi è pari a  $40+20+10+60+50+200+10+30+20= 440$  giorni. Per determinare la data richiesta ragioniamo come segue: dopo 366 giorni sarà il 11/3/2012, dopo 397 giorni sarà l'11/4/2012, dopo 427 giorni sarà l'11/5/2012 e dopo 440 giorni sarà il 24/5/2012.

**Risposta:** 2405

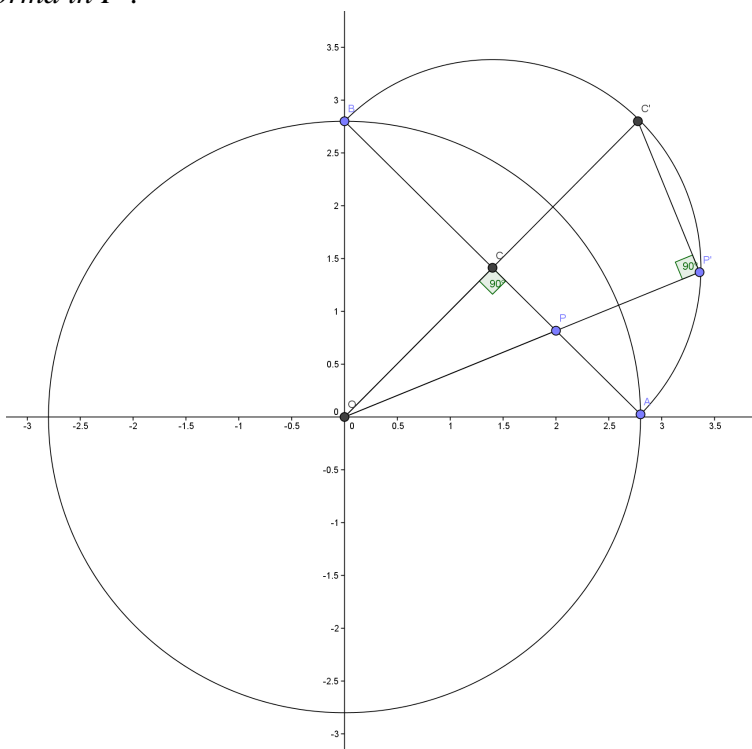
## Problema 14 – L’inversione

50 punti

Consideriamo nel piano cartesiano la circonferenza di centro l’origine  $O$  e raggio  $r = 2\sqrt{2}$ . L’inverso di un punto  $P$  nel piano è definito dal punto  $Q$  che si trova sulla semiretta  $OP$  di origine  $O$  e tale che  $\overline{OP} \times \overline{OQ} = r^2$ . Se il punto  $P$  percorre il segmento di estremi  $A(r,0)$  e  $B(0,r)$ , il punto  $Q$  si muoverà lungo una curva di cui si chiede di calcolare la lunghezza. Nella risposta fornire le prime 4 cifre del numero esprimente il risultato, senza considerare la virgola decimale (ad esempio per 1,23456... si scriva 1234).

**Soluzione:**

Sia  $C$  il punto medio di  $AB$ . Il segmento  $AB$  verrà trasformato nella semicirconferenza di centro  $C$  e diametro  $AB$ . La dimostrazione può essere fatta per via analitica oppure per via geometrica. Dimostriamolo per via geometrica. Dalla definizione si vede facilmente che i punti  $A$  e  $B$  sono lasciati fissi dalla trasformazione, mentre il punto  $C$  si trasforma nel punto  $C'(r,r)$ . Sia poi un punto  $P$  su  $AB$  che si trasforma in  $P'$ .



Essendo  $\overline{OC} \times \overline{OC'} = \overline{OP} \times \overline{OP'}$ , si ottiene  $\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OC'}}$ . I due triangoli  $OCP$  e  $OP'C'$  avendo

l’angolo in  $O$  in comune sono pertanto simili, quindi l’angolo  $\widehat{OP'C'}$  è retto. Allora  $P'$  si trova sulla circonferenza di diametro  $OC'$  e centro  $C$ , che coincide con la circonferenza di centro  $C$  e diametro  $AB$ , da cui segue quanto volevamo mostrare. Di conseguenza la lunghezza della curva richiesta (semicirconferenza di diametro  $AB$ ) è pari a  $\overline{AB} \times \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi = 6,283185\dots$

**Risposta:** 6283

## Problema 15 – Il volo attorno al mondo

55 punti

Un gruppo di aerei è dislocato su una piccola isola. Il serbatoio di ogni aereo contiene carburante sufficiente a consentirgli esattamente mezzo giro del mondo, ma è possibile trasferire quanto carburante si vuole dal serbatoio di un aereo a quello di un altro mentre gli aerei sono in volo. La sola fonte di carburante è sull'isola e si suppone che non venga perduto tempo nel rifornimento sia in aria che al suolo. Qual è il numero minimo di aerei necessario per assicurare il volo di uno di essi per un giro completo attorno al mondo, ammettendo che gli aerei abbiano la stessa velocità costante rispetto al suolo, lo stesso consumo di carburante e che tutti gli aerei rientrino sani e salvi alla base?

### Soluzione:

1°) Un solo aereo non basterebbe: il suo pieno di carburante gli consentirebbe solo mezzo giro del mondo.

2°) Due aerei non ce la farebbero poiché uno non potrebbe rifornire l'altro e tornare indenne alla base.

3°) Basterebbero 3 aerei, diciamo A, B e C, che si comportassero così: partono tutti e tre verso EST (immaginiamo l'isoletta sull'equatore). Ad un ottavo di giro della terra hanno nei loro serbatoi  $\frac{3}{4}$  del pieno. C cede ad ognuno dei compagni, A e B,  $\frac{1}{4}$  del suo serbatoio, rimane con  $\frac{1}{4}$  di carburante e torna sull'isola per rifornirsi. A e B proseguono fino ad  $\frac{1}{4}$  di circonferenza col serbatoio a  $\frac{3}{4}$ . Qui B cede ad A  $\frac{1}{4}$  del suo serbatoio, A viaggia, col pieno fino ad arrivare a  $\frac{3}{4}$  di circonferenza terrestre. Nel frattempo B torna alla base, invertendo la rotta (con metà serbatoio, bastante per il viaggio), si rifornisce e parte verso OVEST accompagnato da C. Ad  $\frac{1}{8}$  di circonferenza C cede a B  $\frac{1}{4}$  di carburante, riempiendo il serbatoio del collega, e ritorna all'isola, B raggiunge A con  $\frac{3}{4}$  di carburante e gli dà mezzo serbatoio di carburante permettendogli così di completare il giro del mondo. B resta quindi con solo  $\frac{1}{4}$  di carburante ma viene rifornito, a  $\frac{1}{8}$  di circonferenza, da C, il quale ha avuto giusto il tempo di ritornare alla base e fare il pieno. C cede quindi a B  $\frac{1}{4}$  del suo carburante ed anch'essi, B e C, fanno ritorno indenni alla base.

Risposta: **0003**

## Problema 16 – Calcolo enigmatico

60 punti

$$\begin{array}{r}
 \blacksquare \quad \square \quad \times \quad \square \quad = \quad \square \quad \square \quad \square \\
 + \quad - \quad - \\
 \blacksquare \quad \square \quad \square \quad : \quad \square \quad = \quad \square \quad \square
 \end{array}$$

---










$$\square \quad \square \quad \square \quad - \quad \blacksquare \quad = \quad \square \quad \blacksquare \quad \square$$

A segno uguale corrisponde cifra uguale (e a segno diverso cifra diversa).

Quale numero corrisponde alla stringa  $\blacksquare \quad \square \quad \square \quad \square \quad ?$

**Soluzione:**

Sostituiamo lettere ai simboli in questo modo:

 = A,  = B,  = C,  = D,  = E,  = F,  = G,  = H

Otteniamo così:

$$\begin{array}{r} AB \times C = BGH \\ + \quad - \quad - \\ DCE : F = FG \end{array}$$

---

$$BBB - A = BDC$$

Dalla somma (in verticale) si deduce che  $E = 0$  e  $B = D + 1$ . Conseguentemente dalla divisione (in orizzontale) si ha che uno, fra F e G, vale 5 e l'altro è pari (non nullo), dall'ultima sottrazione (in verticale) si deduce che è  $G > F$ , quindi se  $F = 5$  allora  $G = 6$  oppure  $G = 8$ , se  $G = 5$  allora  $F = 2$  o  $F = 4$ . Proviamo la prima ipotesi,  $F = 5$ , se  $G = 6$  avremmo  $D = 1$  (non potendo essere zero) e quindi  $B = 2$ . Ma allora  $H > 6$  e  $C < 4$ : assurdo per la prima sottrazione (in verticale).

Quindi  $G = 8$ . Deduciamo  $H < 8$ ,  $H \neq 6$ ,  $D = 2$ . Otteniamo  $B = 3$ ,  $C = 9$  perché  $58 \times 5 = 290$  (vedi seconda riga). Da qui  $A = 4$ ,  $C = 9$ ,  $H = 7$ .

I conti tornano. Si può facilmente controllare che l'ipotesi  $G = 5$  non porta a risultati corretti, infatti otterremmo  $F = 2$  o  $F = 4$ . Nel primo caso dedurremmo  $C = 5$ ,  $D = 0 = E$ , contro le indicazioni del testo. Nel secondo caso otterremmo  $D = 1$ ,  $C = 8$ , da cui  $B = 2$ ,  $A = 4 = F$  impossibile per le motivazioni di cui sopra. In conclusione la soluzione unica sarà

$$\begin{array}{r} 43 \times 9 = 387 \\ + \quad - \quad - \\ 290 : 5 = 58 \end{array}$$

---

$$333 - 4 = 329$$

Quindi DHGC rappresenta il numero 2789.

**Risposta:** 2789

## Problema 17 – Lezioni di tennis

**60 punti**

Bruno, Carlo, Donato, Flavio, Giorgio e Michele sono istruttori di tennis ed ognuno ha a disposizione un campo. Ognuno ha una sorella che prende lezioni di tennis ogni lunedì alla stessa ora, ma non dal proprio fratello.

Si sa che

1) Le sorelle hanno al femminile gli stessi nomi dei maestri, ma nessuna ha lo stesso nome del proprio maestro; inoltre non ci sono coppie di fratelli con gli stessi nomi (non esistono ad es. Donato-Donata).

- 2) Per non farsi vedere dai rispettivi fratelli nessuna gioca accanto al campo che è di fianco a quello in cui il fratello tiene il suo corso.
- 3) In due campi non ci sono mai due coppie con gli stessi nomi.
- 4) Sul campo 6 giocano Donato e Carla.
- 5) Il fratello di Carla gioca con Giorgia sul campo 2.
- 6) Altri due campi sono occupati da Giorgio con la sorella di Bruno e da Bruno con Flavia.
- 7) Il fratello di Flavia dà lezioni alla sorella di Giorgio.
- 8) Michela si allena nel campo successivo a quello dove gioca la sorella di Michele.
- 9) Giorgio gioca due campi dopo Flavia.

In quali campi giocano nell'ordine Bruna, Donata, Flavia e Michela (formando un numero di 4 cifre)?

**Soluzione 1:**

Convenzione: iniziali maiuscole = Maschi; iniziali minuscole = femmine;  $F(g)$  = Fratello di  $g$  ;  $s(G)$  = sorella di  $G$

Dalle affermazioni 4 e 5 fornite dal quesito si ricava la seguente tabella:

<b>Campo</b>	<b>Lui</b>	<b>Lei</b>
1		
2	$F(c)$	$g$
3		
4		
5		
6	$D$	$c$

Informazioni aggiuntive (affermazioni 6 e 7):

	$G$	$s(B)$
	$B$	$f$
	$F(f)$	$s(G)$

Scriveremo ad es.  $G3, s(G)1$  per indicare che  $G$  sta nel campo 3, la sorella di  $G$  sta nel campo 1, ecc.

Dall'affermazione 9 si hanno 2 possibilità: a)  $G3$ ; b)  $G5$ . Esaminiamole.

- a)  $G3-s(B)3$  implica  $f1-B1$  da cui (aff. 2)  $s(G)5-F(f)5$  (non sul 6 altrimenti  $c=s(G)$  che contraddirebbe l'affermazione 5). A questo punto l'affermazione 8 implica  $s(M)2, m3$  oppure  $s(M)4, m5$ . L'ipotesi  $s(M)4$  implica (aff. 2)  $M2$ , da cui  $M=F(c)$ , ossia  $c=s(M)$ , dunque  $s(M)6$  che porta a contraddizione. Rimane dunque  $s(M)2, m3$ . Questo comporta  $g=s(M)$ , pertanto  $M4$  (non sul 5 perché lì c'è il fratello di Flavia). Rimangono da piazzare

due maschi (C ed F) sui campi 2 e 5 e, per l'affermazione 1, sarà  $F=F(c)$  sul campo 2 e  $C=F(f)$  sul campo 5. Ora abbiamo

<b>Campo</b>	<b>Lui</b>	<b>Lei</b>
1	B	$f = s(C)$
2	$F=F(c)$	$g=s(M)$
3	G	$m=s(B)$
4	M	
5	$C=F(f)$	$s(G)$
6	D	$c=s(F)$

Segue  $s(D)4$ , dunque per l'aff.1 deve essere  $d5$  e questo contraddice l'affermazione 3 (sui campi 5 e 6 avremmo Carlo-Donata e Donato-Carla).

In conclusione dunque l'ipotesi a) porta a contraddizione.

b)  $G5, f3-B3, s(B)5$  da cui (aff. 2 e 7)  $F(f)1-s(G)1$ . Per l'affermazione 8 avremo  $m4, s(M)3$  oppure  $m5, s(M)4$ .

Se  $m5, s(M)4$  allora, per l'asserzione 2, si avrebbe  $M1$  oppure  $M2$ . Se  $M1$  allora  $M=F(f)$  da cui  $s(M)=f$  gioca sul campo 3 in contraddizione con  $s(M)4$ . Se  $M2$  allora  $M=F(c)$  da cui  $s(M)=c$  che gioca sul campo 6 in contraddizione con  $s(M)4$ .

Quindi deve essere  $m4, s(M)3$ . Per l'asserzione 1 si ha  $M1$ , Carlo non può giocare sul 2 (sempre per l'ass.1) dunque  $C4$  e  $F2$ . Rimangono da piazzare Bruna e Donata sui campi 1 e 5, quindi  $b1$  ( $b5$  contraddirebbe l'aff. 1) e  $d5$ .

Ecco tabella conseguente:

<b>Campo</b>	<b>Lui</b>	<b>Lei</b>
1	$M=F(f)$	$b=s(G)$
2	$F=F(c)$	g
3	$B=F(d)$	$f=s(M)$
4	C	m
5	$G=f(B)$	$d=s(B)$
6	D	$c=s(F)$

Si può già dare la risposta:  $bdfm$  implicano 1534.

Proseguendo nel problema si ottiene pure  $m=s(D)$  e  $g =s(C)$ .

### Soluzione 2:

Convenzione: iniziali maiuscole = Maschi; iniziali minuscole = femmine;  $F(g)$  = Fratello di g ;  $s(G)$  = sorella di G

Dalle affermazioni 4 e 5 fornite dal quesito si ricava la seguente tabella:

<b>Campo</b>	<b>Lui</b>	<b>Lei</b>
1		
2	$F(c)$	g
3		
4		
5		
6	D	c

Informazioni aggiuntive (affermazione 6):

	$G$	$s(B)$
	$B$	$f$

Scriveremo ad es.  $G3, s(G)1$  per indicare che  $G$  sta nel campo 3, la sorella di  $G$  sta nel campo 1, ecc.

Dall'affermazione 9 si hanno 2 possibilità:

- a)  $G3-s(B)3, B1-f1$  da cui (aff. 2)  $F(f)5-s(G)5$  e ancora (aff. 8) tre sottocasi:
- I)  $f=s(M), g=michela$ , impossibile
  - II)  $g=s(M)$ , da cui  $F(f)5=M5$  oppure  $M4$ . Nel 1° caso:  $f=s(M)=g$ , assurdo. Nel 2° si ha  $M=F(g)$  quindi  $F(c)=F$  [poiché  $F(c) \neq C$ , aff. 1],  $F(f)=C$  nonché  $d4, b5$  per non contraddire l'aff. 3. Ma così otterremmo  $d=s(D)$  contro l'aff. 1 o  $b=s(D)$  contro aff. 2.
  - III)  $s(M)4, s(G)=m$ , da cui  $F(c)2=M2$  (aff. 1,2), ossia  $c=s(M)$  che porta a contraddizione.
- b)  $G5-s(B)5, B3-f3, s(B)5$  da cui (aff. 7)  $F(f)1-s(G)1$ . Quindi  $s(M)4, m5$  oppure  $s(M)3, m4$ . Nel 1° caso otteniamo  $m=s(B), F(f)=M$  [ $F(c) \neq M$  (aff. 3)], che porta all'assurdo  $f3=s(M)4$ . Nel 2° caso ( $m4$ ) vi sono ancora 2 possibilità:
- I)  $s(G)=d$  e quindi  $s(B)=b$  impossibile (va contro aff.1)
  - II)  $s(G)=b$  e quindi  $s(B)=d$ , OK.

Ecco tabella conseguente:

Campo	Lui	Lei
1	$F(f)$	$b$
2	$F(c)$	$g$
3	$B$	$f$
4	$F(g)$	$m$
5	$G$	$d$
6	$D$	$c$

Si può già dare la risposta:  $bdfm$  implicano 1534.

Proseguendo nel problema si ottiene la tabella finale:

Campo	Lui	Lei
1	$M$	$b$
2	$F$	$g$
3	$B$	$f$
4	$C$	$m$
5	$G$	$d$
6	$D$	$c$

Infatti  $F(g)$  non può essere  $F$  sennò  $F(f)=C$  e  $F(c)=M$  vicino a  $f=s(M)$  contro aff. 2.

Quindi  $F(g)=C, F(c)=F, F(f)=M$  come da tabella.

Risposta: **1534**

## Problema 18 – Il problema di Giuseppe

65 punti

Giuseppe vive in un paese che conta esattamente 2011 abitanti molto superstiziosi. Il grande astrologo del paese ha previsto che tra pochi giorni gli extraterrestri sbarcheranno e faranno prigionieri tutti gli abitanti. Il sindaco, per non cadere in mano agli extraterrestri, ha ordinato un suicidio collettivo che si svolgerà nel seguente modo. Tutti gli abitanti si recheranno in un campo e si disporranno su una enorme circonferenza. Numeriamo gli abitanti in senso antiorario a partire dal sindaco che sarà il numero 1. Verrà uccisa una persona sì ed una no lungo la circonferenza fino a quando ne rimarrà una sola. Quindi verranno inizialmente uccise le persone di posto 2,4,6,... e così via. Giuseppe che è un matematico non crede a queste cose e, per salvarsi, calcola in quale posizione sulla circonferenza dovrà mettersi per essere l'ultimo a sopravvivere. Quale posizione dovrà occupare Giuseppe?

### Soluzione:

Supponiamo di avere  $k$  abitanti e sia  $F(k)$  la posizione dell'ultimo che sopravvive. E' chiaro che al primo giro sono uccise tutte le persone di posto pari. Se  $k = 2n$  è pari, allora dopo un giro rimarranno solamente le persone di posto dispari, quindi  $F(2n) = 2F(n) - 1$  (\*). Se  $k = 2n + 1$  è dispari, allora durante il primo giro l'ultimo a morire sarà la persona di posto  $2n$ , poi toccherà a quella di posto 1, e rimarranno le persone  $3,5,7,\dots,2n+1$  che sono esattamente  $n$ . In questo caso si ha  $F(2n + 1) = 2F(n) + 1$  (\*\*). Poiché  $F(1) = 1$ , le (\*) e (\*\*) forniscono una relazione ricorsiva che ci permette di calcolare  $F(2011)$ :

$$F(2011) = 2F(1005) + 1$$

$$F(1005) = 2F(502) + 1$$

$$F(502) = 2F(251) - 1$$

$$F(251) = 2F(125) + 1$$

$$F(125) = 2F(62) + 1$$

$$F(62) = 2F(31) - 1$$

$$F(31) = 2F(15) + 1$$

$$F(15) = 2F(7) + 1$$

$$F(7) = 2F(3) + 1$$

$$F(3) = 2F(1) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3.$$

Ora sostituendo a ritroso troviamo  $F(7)=7$ ,  $F(15)=15$ ,  $F(31)=31$ ,  $F(62)=61$ ,  $F(125)=123$ ,  $F(251)=247$ ,  $F(502)=493$ ,  $F(1005)=987$  e finalmente  $F(2011)=1975$ .

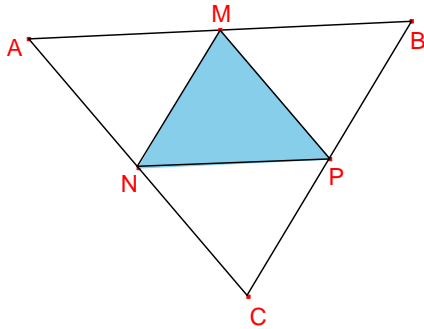
Risposta: **1975**

## Problema 19 – Facendo origami

80 punti

Il piccolo Gigetto è un appassionato di origami. Giocando con la carta egli ritaglia un triangolo con i lati che misurano  $34\text{ cm}$ ,  $30\text{ cm}$  e  $8\sqrt{13}\text{ cm}$ . In seguito congiunge con tre segmenti i punti medi dei tre lati e piega la carta lungo tali segmenti, ottenendo una piramide a base triangolare. Quanto misura il suo volume in  $\text{cm}^3$ ?

**Soluzione:**



Osserviamo che i quattro triangoli nei quali risulta suddiviso il triangolo di partenza sono congruenti fra loro e simili a quello di partenza con rapporto di similitudine di  $\frac{1}{2}$ . Sia  $\overline{AM} = \overline{MB} = 17$  cm,  $\overline{AN} = \overline{NC} = 15$  cm e  $\overline{CP} = \overline{PB} = 4\sqrt{13}$  cm. Con il teorema del coseno è possibile determinare il coseno dell'angolo  $\widehat{AMN}$ , congruente a  $\widehat{NPC}$ ,  $\widehat{MNP}$  e  $\widehat{ABC}$ , angolo la cui misura indicheremo con  $\alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{17^2 + (4\sqrt{13})^2 - 15^2}{2 \cdot 4\sqrt{13} \cdot 17} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

A questo punto occorre determinare il punto d'intersezione delle altezze dei tre triangoli esterni, che risulta la proiezione del vertice della piramide sulla sua base. Detto K il punto del segmento NP piede dell'altezza CK, si ha:

$$\overline{KP} = \overline{CP} \cdot \cos \alpha = 4\sqrt{13} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{CK} = \sqrt{(4\sqrt{13})^2 - 8^2} \text{ cm} = 12 \text{ cm}$$

Ragionando sul triangolo AMN, e detto H il piede dell'altezza uscente da A, si trova invece:

$$\overline{NH} = \overline{NM} - \overline{HM} = \overline{NM} - \overline{AM} \cdot \cos \alpha = 4\sqrt{13} - 17 \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{18\sqrt{13}}{13} \text{ (cm)}$$

Sia poi S il punto d'intersezione fra il segmento NP e il prolungamento di AH.

$$\overline{NS} = \frac{\overline{NH}}{\cos \alpha} = \frac{\frac{18\sqrt{13}}{13}}{\frac{2\sqrt{13}}{13}} \text{ cm} = 9 \text{ cm} \quad \text{e quindi} \quad \overline{SP} = (17 - 9) \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

Pertanto S coincide con K, cioè la proiezione del vertice appartiene allo spigolo NP e dunque la faccia laterale NPC della piramide è perpendicolare alla base della piramide stessa. Concludendo:

$$A(\text{base}) = \frac{\overline{NP} \cdot \overline{CK}}{2} = 102 \text{ cm}^2$$

$$V(\text{piramide}) = \left( \frac{1}{3} \cdot 102 \cdot 12 \right) \text{ cm}^3 = 408 \text{ cm}^3$$

**Risposta:** 0408

## Problema 20 – Un lungo periodo

100 punti

Il minimo numero intero positivo  $n$  tale che  $10^n - 1$  è divisibile per 2011 è 670: da questo segue che il periodo del numero decimale  $1/2011$  ha 670 cifre. Quanto vale la somma di queste cifre?

**Soluzione:**

*Il numero 2011 è primo. Consideriamo i numeri primi per cui  $1/p$  è periodico: per  $p = 7, 11, 13$  i periodi sono rispettivamente 142857, 09, 076923. Osserviamo che, se il periodo è lungo  $2k$ , allora per  $i$  compreso tra 1 ed  $k$ , la cifra  $i$ -esima e la cifra  $(i + k)$ -esima hanno per somma 9 (ad esempio per  $p = 7$ , abbiamo  $1 + 8 = 4 + 5 = 2 + 7 = 9$ ). Se la stessa proprietà vale anche per il periodo di  $1/2011$ , allora la somma delle cifre richiesta è uguale a  $(670)/2 \times 9 = 3015$ .*

*Sia  $c_i$  la cifra  $i$ -esima del periodo di  $1/2011$ . Dimostriamo che se  $1 \leq i \leq 335$ , allora  $c_i + c_{i+335} = 9$ . Dall'algoritmo di divisione otteniamo che il resto  $i$ -esimo della divisione  $1/2011$  è  $r_i = \text{RESTO}(10^{i-1}, 2011)$  mentre  $c_i = \text{INT}(10r_i/2011)$ .*

*Poiché  $10^{670} - 1 = (10^{335} + 1)(10^{335} - 1)$  è divisibile per 2011, ma  $10^{335} - 1$  non lo è, allora 2011 che è primo deve dividere  $10^{335} + 1$ . Quindi anche  $10^{i-1}(10^{335} + 1) = 10^{335+i-1} + 10^{i-1}$  è divisibile per 2011, e da qui segue che  $\text{RESTO}(10^{335+i-1}, 2011) + \text{RESTO}(10^{i-1}, 2011) = r_i + r_{i+335} = 2011$  perché è somma di due numeri positivi minori di 2011 e deve essere un multiplo di 2011. Moltiplicando per  $10/2011$  otteniamo  $10r_{335+i}/2011 + 10r_i/2011 = 10$ . Poiché i due addendi del membro a sinistra non sono interi (altrimenti  $1/2011$  non sarebbe periodico), la somma delle loro parti intere varrà 9, dunque  $c_i + c_{i+335} = 9$ , Q.E.D.*

**Risposta:** 3015